Les nombres complexes : de leurs origines aux plus grandes questions des Mathématiques ou comment gagner 1 million de dollars grâce à $i^2 = -1$.

Cours de Mathématiques MAN 1A, EPFL

1 Un peu d'histoire : Cardan et les équations du troisième degré

On peut vulgairement décrire le corps des nombres complexes comme le corps des réels auxquels on a ajouté les nombres dits "imaginaires", qui sont les racines carrées des nombres négatifs. Dans la suite de vos études, vous verrez que ces nombres complexes ont de nombreuses applications. Mais de quand datent l'apparition des nombres complexes et pourquoi les a-t-on introduit ? Pour cela il faut remonter en pleine Renaissance et à la rencontre d'un mathématicien appelé Cardan.

Les mathématiciens aiment bien les formules. En particulier les formules explicites qui donnent les racines d'un polynôme : plus besoin de faire de divisions euclidiennes ou d'utiliser des algorithmes compliqués, il suffit d'appliquer la formule ! Par exemple pour trouver les racines du binôme du second degré $ax^2 + bx + c$, on a la formule du delta que vous connaissez bien :

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

On peut évident se demander si de telles formules existent aussi pour les polynômes de degré plus grand que 2. En fait on peut montrer que ces formules existent encore pour des polynômes de degré 3 ou 4 (malheureusement à partir de 5 les formules n'existent plus, c'est la célèbre théorie de Galois qui le démontre, mais ces quelques lignes ne racontent pas cette histoire...)

Le génial mathématicien Cardan (1501-1576) affirma qu'une des racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0$$

était donnée par

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Les mathématiciens de l'époque testèrent la formule sur de nombreuses équations. Appliquée à l'équation $x^3 - 12x + 16 = 0$ cela donne par exemple :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{16}{2} + \sqrt{\left(\frac{-12}{3}\right)^3 + \left(\frac{16}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{16}{2} - \sqrt{\left(\frac{-12}{3}\right)^3 + \left(\frac{16}{2}\right)^2}} = -4.$$

La même formule appliquée cette fois à l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ donne

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-15}{3}\right)^3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-15}{3}\right)^3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \end{aligned}$$

Oh ! Une racine carrée d'un nombre négatif. Si les mathématiciens s'étaient arrêtés comme on le fait pour les équations du second degré, c'est-à-dire conclure qu'il n'y a pas de solutions puisqu'on tombe sur des racines carrées indéfinies, l'histoire des nombres complexes se serait arrêtée là. Ils auraient conclu que l'équation n'a pas de solution et le problème aurait été réglé. Cependant on peut vérifier que 4 est une solution de $x^3 - 15x - 4 = 0$. La formule de Cardan serait-elle fausse ? Peut-être pas... Les mathématiciens ont continué le calcul, en écrivant $\sqrt{-121} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$ et ont considéré $\sqrt{-1}$ comme une quantité que l'on pouvait manipuler comme n'importe quel nombre réel. Ils découvrirent que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \text{ et } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

En écriture moderne, on peut en effet vérifier que

$$(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i = 2 \pm \sqrt{-121}.$$

Par conséquent

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

et la formule de Cardan fonctionne ! Et tout d'un coup $i = \sqrt{-1}$ fit son entrée dans l'histoire des Mathématiques...Depuis les nombres complexes conquirent le monde scientifique et poursuivirent leur chemins jusqu'à devenir le centre de la question des Mathématiques la plus célèbre de tous les temps.

2 Gagner 1 million de dollars avec les nombres complexes

Le 24 mai 2000, l'institut de Mathématiques Clay proposa une liste de 7 problèmes de Mathématiques jugés insurmontables (1 seul a été résolu aujourd'hui). Parmi eux on trouve la très célèbre "conjecture de Riemann". Avant de vous présenter la dite conjecture, tâchons de fixer un peu le cadre.

De même que l'on peut définir des fonctions réelles, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut tout à fait construire des fonctions qui prennent des nombres complexes comme entrées et recrâchent des nombres complexes, c'est-à-dire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Une très célèbre fonction est la fonction $\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (le symbole grec ζ s'appelle zeta) qui est définie comme suit : pour $z \in \mathbb{C}$ on définit

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Notez déjà que ζ est une fonction bien étrange puisqu'elle s'écrit comme une série, c'est-à-dire une somme infinie ! Vous l'avez sûrement déjà rencontrée dans vos cours d'analyse car $\zeta(2)$ est la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

que l'on sait convergente et égale $\frac{\pi^2}{6}$.

En plus ζ est un peu comme les assassins de Games of Throne, elle peut changer de visages ! Par exemple pour z tel que $\mathrm{Re}(z) > 1$ on a l'écriture de zeta comme vu plus haut

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Mais pour z tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ zeta s'écrit comme

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_0^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt$$

où $\{t\}$ est la partie fractionnaire du nombre réel t (exemple : $\{1.1\} = 0.1$). Quelle écriture étrange !

Zeta est à présent une intégrale entre 0 et l'infini (notez que s'il y a un nombre complexe dans une intégrale, cela ne change rien, on la traite comme l'intégrale que vous avez apprise dans vos cours d'analyse.) Et on pourrait continuer comme cela, zeta ayant encore d'autres écritures pour les z de partie réelle négative. Bref c'est une fonction bien étrange.

Mais alors me direz-vous qu'elle est le rapport entre zeta et cette conjecture de Riemann ? Riemann (1826-1866) s'intéressait, parmi de nombreux sujets variés, aux fonctions complexes et en particulier à cette fonction zeta qu'il a introduite la toute première fois en 1859 (on l'appelle d'ailleurs aujourd'hui la fonction zeta de Riemann). Parmi les questions qu'il se posait, il y avait celle-ci : où sont les zéros de zeta ? Eh oui, de même que Cardan s'intéressait aux zéros des équations du troisième degré, Riemman cherchait à connaitre les z tels que $\zeta(z) = 0$. On peut démontrer que tous les entiers négatifs du type $-2k, k \in \mathbb{N}^*$ sont des zéros. On les appelle les zéros ***triviaux***, les autres éventuels zéros sont dits ***non triviaux***. Par exemple, on peut démontrer qu'il y a des zéros non triviaux parmi les nombres complexes qui s'écrivent $z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}$. Notez que l'ensemble

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \right\}$$

décrit en fait une droite verticale qui coupe l'axe horizontale en $x = 1/2$, comme décrit sur le figure 1.

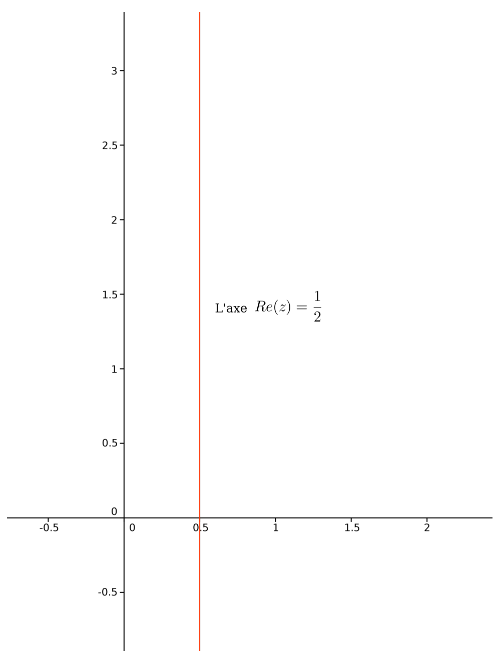


Figure 1: L'axe $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ dans le plan complexe.

Aussi étrange que ces racines puissent paraitre, jusqu'à présent on ne trouva pas de zéro de la fonction zeta qui ne soit pas un zéro trivial ou un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. En fait, Riemann lui-même l'avait constaté et émit cette conjecture

Conjecture (Conjecture de Riemann)**.** *Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\zeta(z) = 0$, alors soit $z = -2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ soit $z \in A$.*

Dis autrement, la conjecture de Riemman stipule que tous les zéros non trivaux se trouvent dans l'ensemble A, c'est-à-dire sur l'axe vertical $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Personne encore n'a été capable de démontrer cette conjecture ou alors de trouver un zéro non trivial qui se situe ailleurs que sur l'axe $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. La question est si difficile qu'elle fait partie de nombreuses listes de problèmes que les mathématiciens jugent vraiment importants de résoudre. Encore plus remarquable, la célèbre conjecture fait partie d'une liste de questions portant sur la fonction zeta. Depuis on a été capable de résoudre nombres de ces questions, sauf en particulier celle portant sur la dite conjecture. Encore plus incroyable, certaines de ces questions autour de zeta sont des conséquences de la conjecture de Riemann si on la suppose vraie ! Et pourtant, malgré que l'on sait démontrer tous ces autres résultats, impossible de remonter jusqu'à la preuve de la conjecture.

En dehors du pur intérêt mathématique, la conjecture de Riemann a des implications importantes en théorie des nombres. En particulier, elle est liée à la répartition des nombres premiers dans la droite réelle. C'est d'ailleurs pour étudier cette répartition que Riemann s'était intéressé à zeta. Quand on sait que de nombreux algorithmes de cryptage de données sont basés sur les nombres premiers, on se doute bien que la fonction zeta et la résolution de la conjecture est un sujet largement débattu et étudié par la communauté mathématique. Cette dernière considère en général que la conjecture est vraie. Evidemment, on aimerait vous en montrer une preuve ! Et tout le monde attend avec impatience cette dernière. En attendant, on peut se satisfaire de vérifier cette conjecture par ordinateur, comme cela vous est présenté dans la prochaine partie de ce document.

3 Vérification de la conjecture de Riemann par ordinateur et le calcul scientifique

3.1 Une première idée

La recherche des zéros de la fonction zeta a donc bousculé la communauté mathématique pendant des années. Armés du glaive de la démonstration, les mathématiciens sont partis en croisade pour explorer toutes les zones du plan complexe à la recherche de ces mystérieux zéros. On pourrait évidemment se dire qu'il suffirait de faire calculer à un ordinateur $\zeta(z)$ pour tous les z et de regarder s'il y a des zéros non triviaux ailleurs que sur $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Malheureusement, passer en revue l'infinitié des nombres complexes est une approche un peu désespérée...Heureusement pour nous, les Mathématiques sont toujours là pour nous secourir et on a été capable d'éliminer une après l'autre des zones du plan complexe dans lesquelles on a pu démontrer qu'il n'y avait pas de zéros de zeta. Aujourd'hui, l'état de la situation est la suivante. On sait avec certitude que les zéros de zeta sont soit les zéros triviaux du type $-2k, k \in \mathbb{N}^*$, soit se trouvent dans la bande $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ du plan complexe. On appelle cette bande *la bande critique* que l'on a dessinée dans la figure 2. La conjecture de Riemann revient donc à dire que tous les zéros de la bande critique se trouvent en fait sur l'axe $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Evidemment il y a toujours une infinité de nombres complexes à contrôler dans cette bande, mais on a déjà gagné un petit peu.

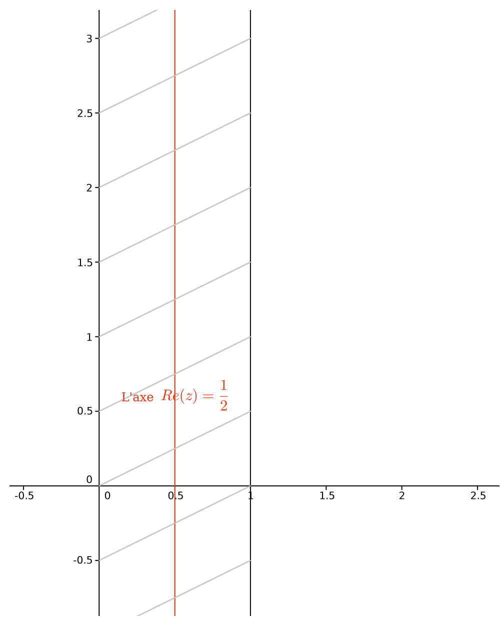


Figure 2: La bande critique $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$ et l'axe $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ dans le plan complexe.

Une stratégie pour attaquer la conjecture de Riemann par ordinateur consiste à faire comme on le ferait pour trouver les zéros d'une fonction réelle, par exemple $x^2 - 1$: on dessine le graphe de la fonction et on regarde si celui-ci coupe l'axe horizontal. Evidemment, puisque que les nombres complexes sont des points dans $\mathbb{R}^2$, cela reviendrait à représenter graphiquement la fonction $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire en 4 dimension, et ce n'est pas facile. Mais on peut utiliser l'astuce suivante : on fixe la partie réelle de z, disons x_0, et on ne considère que des z qui s'écrivent comme $x_0 + iy$ et on fait varier y. On regarde alors la fonction

$$f_{x_0}(y) = \zeta(x_0 + iy)$$

qui est une fonction qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ que l'on va identifier à $\mathbb{R}^2$). On peut grapher cette fonction comme on le fait par exemple pour le cercle que l'on obtient en représentant dans le plan les points

$$(\cos(y), \sin(y)), y \in [0, 2\pi].$$

Ici on va calculer les points

$$(\mathrm{Re}(\zeta(x_0 + iy)), \mathrm{Im}(\zeta(x_0 + iy)) \in \mathbb{R}^2$$

et on les place dans le plan bidimensionnel. Vous avez un exemple dans la figure 3 où on a représenté graphiquement $\zeta(\frac{1}{2} + iy)$ pour $y \in [0, 34]$ (on a choisit 34 pour s'arrêter quelque part et parce que le dessin est joli, mais évidemment il faudrait prendre y entre $-\infty$ et $+\infty$). A chaque fois que la courbe passe par $(0, 0)$, c'est qu'on est tombé sur un zéro de zeta (puisque que 0 s'écrit comme $0 + i0$ et donc s'identifie avec l'origine $(0, 0)$ du plan). On voit très bien avec cette figure que sur l'axe $\mathrm{Re}(z) = x_0 = \frac{1}{2}$, il y en a beaucoup, comme Riemann l'avait découvert.

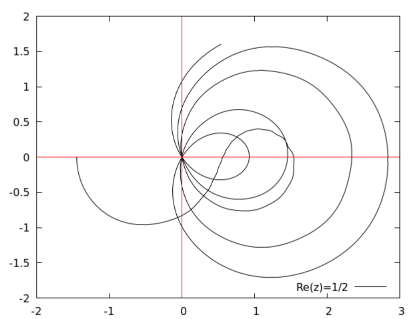


Figure 3: Graphe de la fonction $\zeta\left(\frac{1}{2} + iy\right)$ pour $y \in [0, 34]$ dans $\mathbb{R}^2$. La courbe passe à plusieurs reprises par le point $(0, 0)$ représenté par l'intersection de deux axes rouges. Il y a donc des zéros de zeta sur $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Maintenant prenons $x_0 \in]0, 1[$, mais différent de $\frac{1}{2}$ pour tester la conjecture de Riemann. Si elle est vraie, la courbe obtenue ne devrait jamais passer par $(0, 0)$. Par exemple pour $x_0 = 0.25$ (figure 4) et $x_0 = 0.75$ (figure 5), on constate que la courbe gigotte autour ou près du point $(0, 0)$ mais ne passe jamais par lui. Cela ne constitue par une preuve de la conjecture car il faudrait calculer ce graphe pour toute partie réelle entre 0 et 1 (et pour toute valeur de y), mais cela donne déjà une petite idée.

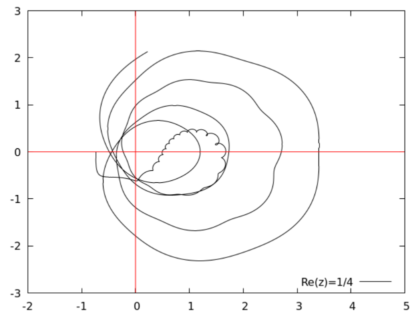


Figure 4: Graphe de la fonction $\zeta\left(\frac{1}{4}+iy\right)$ pour $y \in [0, 34]$ dans $\mathbb{R}^2$. La courbe ne passe jamais par le point $(0, 0)$ représenté par l'intersection de deux axes rouges. Il n'y a donc probablement pas de zéros de zeta sur $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{4}$.

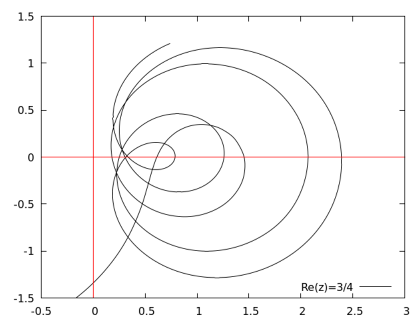


Figure 5: Graphe de la fonction $\zeta\left(\frac{3}{4}+iy\right)$ pour $y \in [0, 34]$ dans $\mathbb{R}^2$. La courbe ne passe jamais par le point $(0, 0)$ représenté par l'intersection de deux axes rouges. Il n'y a donc probablement pas de zéros de zeta sur $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{4}$.

3.2 Une meilleure idée

Il existe une autre manière de s'attaquer à la conjecture par le calcul scientifique. Une manière beaucoup plus rigoureuse que de tester tous les points de la bande critique et beaucoup plus solide. Comme on vous l'a expliqué dans les cours de logique, quand une question est trop dure, on peut essayer de montrer qu'elle est *équivalente* à une question plus simple, et s'occuper de démontrer cette dernière. C'est exactement ce que des mathématiciens chevronnés ont fait : ils n'ont pas démontré la conjecture mais ils ont montré qu'elle était équivalente à ce qu'une certaine suite de nombres réels u_n converge vers 1. Autrement dit, la conjecture est vraie si et seulement $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Or utiliser un ordinateur pour calculer un nombre u_n est autrement plus faisable que de chercher tous les z tels que $\zeta(z) = 0$.

Cette suite de nombre est définie comme suit : on calcule tout d'abord la suite de nombres complexes $c_n = \mathrm{Re}(c_n) + i\,\mathrm{Im}(c_n)$ avec (attention cela devient très barbare)

$$\mathrm{Re}(c_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} r(x)s_n(x)q_n(x)(a_n(x)d_n(x) + b_n(x)c_n(x))dx$$

$$\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} r(x)s_n(x)q_n(x)(a_n(x)c_n(x) - b_n(x)d_n(x))dx$$

où

$$r(x) = \frac{1-0.995^2}{\zeta\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\arctan(x)\right)}, s_n(x) = (1+0.995^2x^2)^{\frac{n-1}{2}}, q_n(x) = (x^2+0.995^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$a_n(x) = \cos((n-1)\arctan(-0.995x)), b_n(x) = \sin((n-1)\arctan(-0.995x)),$$

$$c_n(x) = \cos((n+1)\arctan(-0.995x^{-1})), d_n(x) = \sin((n+1)\arctan(-0.995x^{-1})).$$

Ensuite on calcule le module de c_n et on en prend la racine n-ième, c'est-à-dire on définit $u_n = \sqrt[n]{|c_n|}$. Même si la suite a une écriture très longue et très étrange (il serait d'ailleurs très difficile de vous expliquer le lien de cette suite avec la conjecture sans des centaines de pages de théorie sur les nombres complexes...), elle reste du moins très facilement calculable par ordinateur avec quelques lignes de code dans votre langage favori ! Nous avons par exemple calculé les valeurs de cette suite pour $n = 1, 2, ..., 1000$ et on a obtenu les résultats suivants dans la table 1 :

$u_{991} = 0.993276$	$u_{996} = 0.993332$
$u_{992} = 0.993283$	$u_{997} = 0.993348$
$u_{993} = 0.9933$	$u_{998} = 0.993355$
$u_{994} = 0.993307$	$u_{999} = 0.993373$
$u_{995} = 0.993324$	$u_{1000} = 0.993379$

Table 1: Quelques éléments de la suite u_n. On constate que u_n converge vers 1, ce qui indique que la conjecture de Riemann devrait être vraie.

On peut aussi représenter la suite graphiquement comme dans la figure 6 où on a graphé u_n en fonction de n. On observe le comportement voulu c'est-à-dire que $u_n \to 1$. Cela ne constitue par une preuve de la conjecture de Riemann, car notre ordinateur ne peut pas calculer *exactement* les u_n (l'ordinateur arrondit les valeurs) et encore moins pour n jusqu'à l'infini ! Mais on a quand même une bonne intuition que la conjecture doit être vraie puisqu'on observe le bon comportement pour u_n.

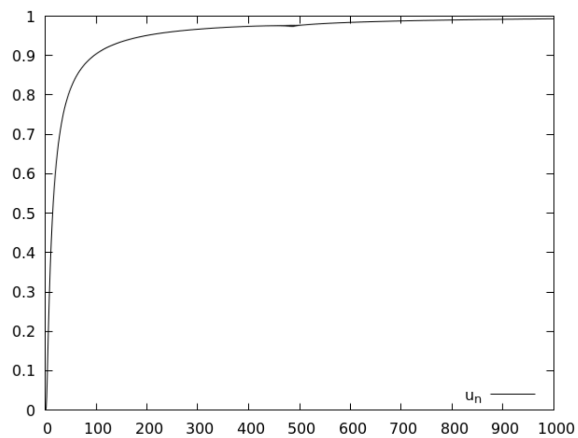
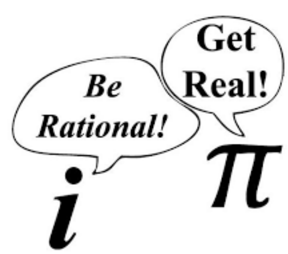


Figure 6: Graphe de la suite u_n en fonction de n. On observe que la suite s'écrase sur 1 quand n devient grand.

4 Conclusion

Et maintenant où en sommes-nous ? Ce petit document avait pour but de vous faire découvrir les origines des nombres complexes et de vous montrer qu'ils sont encore aujourd'hui au coeur de la recherche et un sujet d'actualité. La conjecture de Riemann n'est pas le seul sujet important de nos jours qui traitent des nombres complexes. Il y a de très nombreux domaines de recherches et applications où ils sont présents. Rien que pour vous écrire ce petit document par exemple, on a dû compresser des images pour pouvoir les uploader sur internet ! De nos jours, il n'y pas de compression de musiques ou de films sans avoir recours quelque part à i. Voyager dans les nombres complexes c'est un peu se prendre pour Peter Pan : on explore le pays imaginaire, mais tout ce qu'on y découvre est bien réel.



"Se faire mettre les points sur les i !"